

Tentamen ProgrammaCorrectheid

5 februari 2003

09.00 – 12.00 uur

■ Opgave 1

Gegeven de declaratie:

```
CONST
  n ∈ INTEGER ;
  a ∈ ARRAY [0 .. n) OF INTEGER ;
  {P0 : n > 0 ∧ a[0] > 0}
```

Binnen deze context definiëren we de functie f door

$$f(x) = (\sum i : 0 \leq i < n : a[i] \cdot x^i)$$

en voor $0 \leq k \leq n$ de generalisatie van f

$$g(x, k) = (\sum j : k \leq j < n : a[j] \cdot x^{j-k})$$

- 1. Bereken $g(x, n)$;
- 2. Druk voor $0 \leq k < n$ de waarde van $g(x, k)$ uit in $g(x, k + 1)$.
- 3. Compleet de onderstaande implementatie van de procedure *Berg* en bewijs de correctheid van je oplossing. Formuleer daartoe expliciet de inductiehypothese en de bewijsverplichting.

```
PROCEDURE Berg (y, k : INTEGER ; VAR z : INTEGER) =
  { all Z ∈ INTEGER :
  : pre 0 ≤ k ≤ n ∧ g(y, k) = Z
  , post z = Z }
  [ IF ... THEN
    ...;
  ELSE
    Berg(y, k + 1, z);
    ...;
  END ;
  ] Berg;
```

De procedure *Berf* wordt nu gegeven door

```
PROCEDURE Berf (y : INTEGER ; VAR z : INTEGER ) =  
  { all Z ∈ INTEGER :  
  : pre  $f(y) = Z$   
  , post  $z = Z$  }  
  ||  
  Berg(y, 0, z);  
  ] Berf;
```

Deze implementatie voldoet aan zijn specificatie: dat hoef je niet te bewijzen.

- 4. Geef de aanroepregel voor de procedure *Berf*.

We zoeken nu een herhalingscommando *S* dat voldoet aan de specificatie

```
VAR  
  m : INTEGER ;  
  {P :  $M = (\text{MIN } t : t > 0 \wedge f(t) \bmod a[0] = 0 : t)$  }  
S;  
  {Q :  $m = M$  }
```

- 5. Beargumenteer dat $f(a[0]) \bmod a[0] = 0$.
- 6. Herschrijf de preconditione *P* tot een uitdrukking die een universele kwantificatie bevat.
- 7. Ontwerp systematisch een geannoteerd (herhalings-)commando *S* dat aan bovenstaande specificatie voldoet. Maak in dit programma gebruik van de procedure *Berf*.
HINT: introduceer een extra variabele *q* en neem in je invariant een conjunct $q = f(m)$ op.

■ Opgave 2

Gegeven:

- een geheeltallige functie h van twee geheeltallige parameters. Deze functie is ascending in beide parameters.
- de specificatie

CONST

$m \in \text{INTEGER} ; \{m \geq 0\}$

VAR

$z : \text{INTEGER} ;$

$\{P : Z = (\sum i, j : 0 \leq i < j \leq m \wedge h(i, j) > 0 : j^2)\}$

$T;$

$\{Q : z = Z\}$

- 8. Definieer een functie $F(x, y)$ die een geschikte generalisatie is van de kwantificatie uit de preconditionie.
- 9. Leid voor $F(x, y)$ geschikte recurrente betrekkingen af, inclusief het basisgeval.
- 10. Geef een implementatie van het commando T . We vragen niet om het gehele stappenplan uit te schrijven, maar zijn tevreden met de laatste stap: een goede samenvatting, inclusief invariant en variante functie.



einde